Параметр y, характеризующий прочность волокнистого композита, зависит от объёмной концентрации волокна V_b. Эту зависимость из физических соображений можно считать линейной

$$y = b_0 + b_1 \cdot V_b.$$

В матричной записи

$$XB=Y.$$

Для оценивания коэффициентов линейной модели, меняя V_b от 0 с шагом 0,1, провели пять опытов без повторений. Результаты опытов (в условных единицах) представлены вектором

$$Y = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}9 \\ 3{,}0 \\ 3{,}7 \\ 5{,}2 \end{bmatrix}.$$

Расчётная матрица, второй столбец которой задаёт условия опытов,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Вектор коэффициентов

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления этих коэффициентов в соответствии с (2.18) найдём последовательно матрицу X^T:

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix};$$

матрицу X^TX:

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0{,}3 \end{bmatrix};$$

определитель:

$$\det\left(X^TX\right) = \det\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0{,}3 \end{bmatrix} = 0{,}5;$$

обратную матрицу $(X^TX)^{-1}$:

$$\left(X^TX\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix};$$

матрицу X^TY:

$$X^TY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}9 \\ 3 \\ 3{,}7 \\ 5{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3{,}98 \end{bmatrix}.$$

По формуле (2.18) находим

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 3{,}98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}04 \\ 9{,}8 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, МНК-оценка линейной модели имеет вид:

$$\hat{y} = 1{,}04 + 9{,}8V_b.$$

Отметим, что рассматривать полученную модель нужно совместно с матрицей $(X^TX)^{-1}$, которая оказалась недиагональной. Следовательно, коэффициенты коррелируют друг с другом и для них приходится строить совместную доверительную область, задаваемую эллипсом рассеяния /28/.

Для упрощения вычислений можно было заменить V_b нормированной переменной x_1

$$x_1 = \frac{V_b - 0{,}2}{0{,}2}$$

и оценивать коэффициенты модели $y = b_0 + b_1x_1$.

Тогда получим следующие результаты:

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_0 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0{,}5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что для столбцов матрицы X выполняется условие ортогональности (2.36).

Далее вычисляем:

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0{,}5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(X^TX\right) = \det\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} = 12{,}5,$$

$$(X^TX)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$X^TY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,96 \end{bmatrix},$$

$$\hat{y} = 3 + 1,96x_1.$$

При замене нормированной переменной x_1 на переменную V_b этот результат совпадает с полученным ранее. Однако при использовании нормированной переменной вычислительная процедура значительно упрощается. Матрица X^TX получилась диагональной. Поэтому сразу можно записать ей обратную, так как на главной диагонали матрицы, обратной к диагональной, будут стоять числа, обратные соответствующим числам, стоящим на диагонали прямой матрицы. Можно оценивать коэффициенты независимо друг от друга. Чтобы воспользоваться такой возможностью необходимо иметь оценку дисперсии воспроизводимости эксперимента s_y^2.

Дисперсия воспроизводимости, принятая по априорным данным, оказалась равной $s_y^2 = 0,0333$ при степенях свободы $\nu_2 = 3$.

Для дисперсий оценок коэффициентов, согласно (2.33), получаем

$$s_{b_0}^2 = 0,2 \cdot s_y^2 = 0,000666,$$

$$s_{b_1}^2 = 0,4 \cdot s_y^2 = 0,001332.$$

Для выбранного уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $\nu = 3$ из приложения 3 нашли табличное значение t-критерия $t_{0,05;3}^{табл} = 3,18$. Затем по формуле (2.34) подсчитали доверительные интервалы коэффициентов регрессии

$$\Delta_{b_0} = 3,18\sqrt{0,000666} = 0,082,$$

$$\Delta_{b_1} = 3,18\sqrt{0,001332} = 0,116.$$

В силу (2.35) коэффициенты модели следует признать статистически значимыми.

Теперь проверим адекватность модели. При отсутствии повторных опытов дисперсию адекватности определяем по формуле (2.22). Числитель этой формулы (остаточная сумма квадратов) в матричной форме имеет вид

$$\sum_{u=1}^{N}(y_u - \hat{y}_u) = (Y - \hat{Y})^T(Y - \hat{Y}),$$

где

$$Y - \hat{Y} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,04 \\ 2,02 \\ 3 \\ 3,98 \\ 4,96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix}.$$

Транспортирование и перемножение дают

$$(Y - \hat{Y})^T \cdot (Y - \hat{Y}) = [0,16 \quad -0,12 \quad 0 \quad -0,28 \quad 0,24] \cdot \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix} = 0,176.$$

Знаменатель формулы (2.22) (степень свободы) вычисляем по (2.23)

$$\nu = 5 - 2 = 3.$$

Тогда дисперсия адекватности равна

$$s_{ад}^2 = 0,176/3 = 0,0587.$$

Гипотезу об адекватности модели проверим по F-критерию. Найдём его расчётное значение по формуле (2.29):

$$F_{3;3}^{расч} = 0,0587/0,0333 = 1,76.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ табличное значение F-критерия (см. приложение 2) $F_{0,05;3;3}^{табл} = 9,28$.

Так как $F^{расч} < F^{табл}$, гипотеза об адекватности модели при 5%-ном уровне значимости не отвергается.