Введём нормированные переменные

$$x_1 = \frac{\tau - 5}{3}, \quad x_2 = \frac{T - 70}{20}$$

и используем модель в виде квадратичного полинома

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Для оценки шести (p = 6) коэффициентов этой модели с помощью /38/ был выбран и реализован композиционный, симметричный, ортогональный, трёхуровневый план эксперимента, который приведён в табл. 2.1. Каждый опыт этого плана повторялся дважды.

Таблица 2.1

**План и результаты эксперимента**

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y'$ | $y''$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –1 | –1 | 49,8 | 54,4 | 52,1 |
| 2 | 1 | –1 | 72,0 | 66,6 | 69,3 |
| 3 | –1 | 1 | 75,9 | 73,5 | 74,7 |
| 4 | 1 | 1 | 73,2 | 77,0 | 75,1 |
| 5 | –1 | 0 | 74,5 | 69,9 | 72,2 |
| 6 | 1 | 0 | 80,2 | 76,2 | 78,2 |
| 7 | 0 | –1 | 49,7 | 54,7 | 52,2 |
| 8 | 0 | 1 | 79,9 | 72,1 | 76,0 |
| 9 | 0 | 0 | 71,1 | 66,7 | 68,9 |

Из табл. 2.1 следует, что число опытов N = 9, число повторений n = 2, степень свободы дисперсии адекватности $\nu_1 = N - p = 3$, степень свободы дисперсии воспроизводимости $\nu_2 = N(n-1) = 9$, последний столбец средних результатов даёт матрицу $\bar{Y}$.

Дисперсии опытов, подсчитанные по формуле (2.24), оказались однородными по G-критерию при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Расчётный G-критерий по (2.26) $G_{1;9}^{\text{расч}} = 30{,}42/106{,}44 = 0{,}2858$ меньше табличного $G_{0,05;1;9}^{\text{табл}} = 0{,}6385$ (см. приложение 1).

По формуле (2.25), учитывающей дисперсии опытов, определяем дисперсию воспроизводимости $s_y^2 = 11{,}83$.

Запишем расчётную матрицу X

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_1 \cdot x_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Вычисляем матрицы:

$$X^TX = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(X^TX)^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$X^T\bar{Y} = \begin{bmatrix} 618{,}7 \\ 23{,}6 \\ 52{,}2 \\ -16{,}8 \\ 421{,}6 \\ 399{,}4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix} = (X^TX)^{-1}X^T\bar{Y} = \begin{bmatrix} 70{,}05 \\ 3{,}93 \\ 8{,}7 \\ -4{,}2 \\ 4{,}57 \\ -6{,}53 \end{bmatrix}.$$

Из ковариационной матрицы $(X^TX)^{-1}$ следует, что коэффициенты $b_{11}$ и $b_{22}$ коррелируют с $b_0$. Таким образом

$$\hat{y} = 70{,}05 + 3{,}93x_1 + 8{,}7x_2 - 4{,}2x_1x_2 + 4{,}57x_1^2 - 6{,}53x_2^2.$$

В силу (2.33) дисперсии оценок коэффициентов

$$s_{b_0}^2 = (5/9)s_y^2 = 6{,}57; \quad s_{b_1}^2 = s_{b_2}^2 = (1/6)s_y^2 = 1{,}97;$$

$$s^2_{b_{12}} = (1/4)s^2_y = 2{,}96; \quad s^2_{b_{11}} = s^2_{b_{22}} = (1/2)s^2_y = 5{,}91.$$

Тогда среднеквадратичные ошибки в определении коэффициентов

$$s_{b_0} = 2{,}563; \quad s_{b_1} = s_{b_2} = 1{,}404; \quad s_{b_{12}} = 1{,}72; \quad s_{b_{11}} = s_{b_{22}} = 2{,}431.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $\nu = 9$ находим табличное значение t-критерия $t_{0,05;9} = 2{,}26$ (см. приложение 3) и по (2.34) вычисляем доверительные интервалы коэффициентов $\Delta_{b_0} = 2{,}26\, s_{b_0} = 5{,}79$; $\Delta_{b_1} = \Delta_{b_2} = 2{,}26\, s_{b_1} = 3{,}17$; $\Delta_{b_{12}} = 2{,}26\, s_{b_{12}} = 3{,}89$; $\Delta_{b_{11}} = \Delta_{b_{22}} = 2{,}26\, s_{b_{11}} = 5{,}49$.

Оказалось, что только абсолютное значение коэффициента $b_{11} = 4{,}57$ не превышает значение своего доверительного интервала. Поэтому коэффициент $b_{11}$ можно считать незначимым и исключить из модели. Остальные коэффициенты вышли за рамки своих доверительных интервалов и их можно признать статистически значимыми.

Так как коэффициенты $b_0$ и $b_{11}$ взаимосвязаны, то исключение коэффициента $b_{11}$ требует пересчёта коэффициента $b_0$ и его дисперсии. После исключения столбца $x_1^2$ в матрице X и пересчёта получили: $b_0 = 73{,}1$;

$$s^2_{b_0} = \frac{1}{3} s^2_y = 3{,}94; \; s_{b_0} = 1{,}986; \; \Delta_{b_0} = 2{,}26 \cdot s_{b_0} = 4{,}49.$$

Итак, после исключения коэффициента $b_{11}$ и пересчёта $b_0$ получим следующие уравнения регрессии:

$$y = 73{,}1 + 3{,}93x_1 + 8{,}7x_2 - 4{,}2x_1x_2 - 6{,}53x_2^2.$$

Для проверки адекватности этой модели подсчитаем результаты опытов, предсказанные с помощью модели, и по формуле (2.32) определим дисперсию адекватности $s^2_{ад} = 2 \cdot 78{,}342 / 4 = 39{,}17$.

Окончательная модель включает пять коэффициентов, поэтому по формуле (2.23) число степеней свободы дисперсии адекватности $\nu = 9 - 5 = 4$.

Согласно (2.29), находим расчётное значение F-критерия

$$F^{расч}_{4;9} = 39{,}17 / 11{,}83 = 3{,}31.$$

При $\alpha = 0{,}05$ из приложения 2 имеем $F^{табл}_{0,05;4;9} = 3{,}63$. Табличное значение F-критерия превышает расчётное. Следовательно, гипотеза об адекватности построенной модели при 5%-ном уровне значимости принимается.

Далее полученная модель используется для решения различных задач, в том числе и производственных. Возникающие при этом трудности отмечались в разд. 1.3.

***Пример 3***

С помощью серии опытов на промышленном оборудовании необходимо было выяснить статистическую зависимость морозостойкости $(y)$ кирпича глиняного обыкновенного от режимов механической переработки сырьевой смеси (фактор $x_1$), максимальной температуры (фактор $x_2$) и продолжительности выдержки при этой температуре (фактор $x_3$). Морозостойкость является основным показателем долговечности стеновых керамических материалов и определяется числом циклов попеременного замораживания и оттаивания. В линии переработки сырьевой смеси учитывались вальцы тонкого и грубого помола, а также бегуны.

На основании результатов предшествующих лабораторных исследований предполагалось, что экспериментальные данные могут быть представлены в виде модели, включающей линейные эффекты и эффекты взаимодействий факторов (неполный полином третьей степени)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Для оценки коэффициентов этой модели каждый фактор достаточно рассматривать только на двух уровнях, кодируя нижний уровень –1, а верхний +1.

На нижнем уровне режима переработки сырьевой смеси $(x_1 = -1)$ вальцы грубого и тонкого помола работали соответственно с зазором 20 и 10 мм, бегуны не включались. На верхнем уровне $(x_1 = +1)$ зазоры вальцов уменьшались до 10 и 3 мм, а также включались бегуны. Нетрудно заметить, что верхний уровень фактора $x_1$ обеспечивал лучшую переработку сырьевой смеси по сравнению с нижним уровнем.

Максимальная температура обжига составляла 975 $(x_2 = -1)$ и 1025°C $(x_2 = +1)$. При этом выдержка производилась в течение 60 мин $(x_3 = -1)$ и 120 мин $(x_3 = +1)$. Обжиг образцов выполнялся в электрической печи.

Эксперимент проводился по факторному плану типа $2^3$ (N = 8) /1/. Этот план удовлетворяет условиям ортогональности, симметрии и нормировки. Опыты выполнялись в случайном порядке с тремя повторениями (n = 3). План и результаты эксперимента приведены в табл. 2.2.