

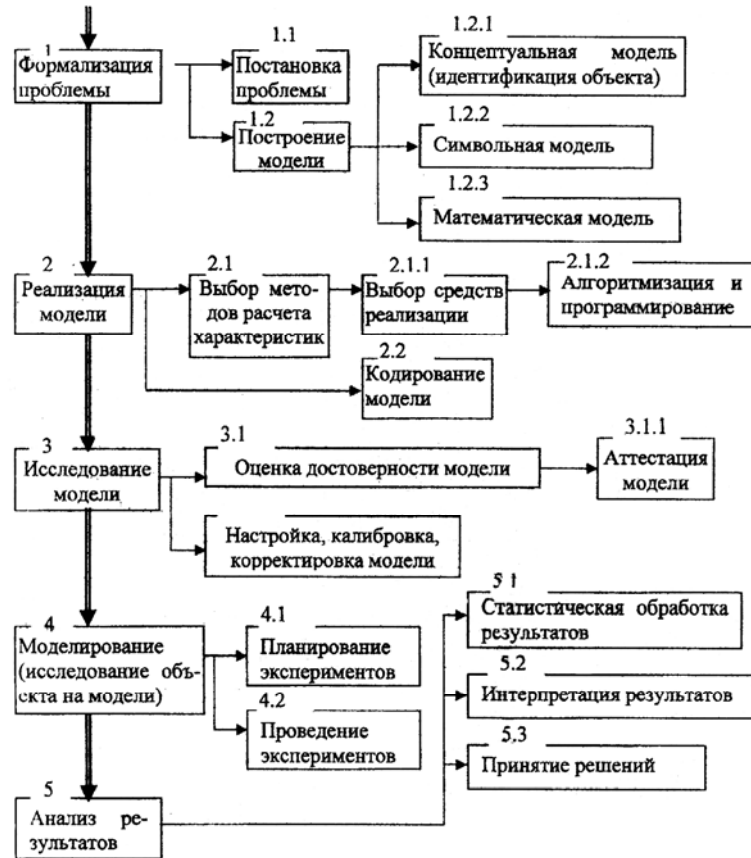
ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Вводные замечания. Типы моделей

В различных областях научной и практической деятельности встречается много задач с качественными факторами. Эти факторы являются дискретными по своей природе, их уровням не соответствует числовая шкала и порядок уровней безразличен. Так, если ведется наблюдение за изделиями, изготовленными на нескольких станках рабочими разных смен, то имеется минимум два фактора – станок и смена. Каждый фактор имеет несколько различных уровней. Уровнями фактора станок могут быть станок № 1, станок № 2 и т.д. Уровнями фактора смена могут быть первая, вторая и третья смены. В приведенном примере список факторов можно дополнить такими факторами, как различные партии сырья, способы хранения и т.д.

При изучении влияния качественных факторов на выходной параметр объекта исследования (отклик) обычно используется дисперсионный анализ, охватывающий широкий круг стандартных статистических методов. В настоящее время дисперсионный анализ является одним из наиболее общих и распространенных методов статистического анализа. С помощью дисперсионного анализа производится разложение общей дисперсии (простейшей меры рассеяния) некоторого измеряемого признака (отклика) на составляющие, характеризующие влияние изучаемых факторов и фактора случайности, с последующей оценкой существенности интересующих составляющих на фоне фактора случайности (ошибки эксперимента).

Успех применения дисперсионного анализа во многом зависит от того, насколько хорошо понята структура экспериментальных данных, построена соответствующая статистическая модель и составлен перечень вопросов, на которые требуется ответить с помощью этой модели. При проведении дисперсионного анализа используются модели трех типов. В модели I рассматриваются фиксированные уровни факторов, в модели II уровни выбираются случайным образом, а модель III представляет собой сочетание первых двух моделей. Необходимо отметить, что даже для одной и той же совокупности данных могут быть использованы различные модели, если требуется получить ответ на разные вопросы. В данной работе будет рассматриваться только модель I (параметрическая модель), на основе которой главным образом решается задача о сравнении множества средних,



Примерная схема этапов моделирования

полученных по данным соответствующим образом спланированного эксперимента.

Простейшую форму плана эксперимента имеем при сравнении k уровней одного и того же фактора A (однофакторный дисперсионный анализ). В этом случае на каждом i -том уровне фактора A выполняется n_i повторных наблюдений (опытов). При $n_i = n = \text{const}$ эксперимент включает $N = k \cdot n$ опытов и его результаты записываются в виде таблицы из k строк и n столбцов. В дальнейшем будем рассматривать случаи равночисленных повторных опытов. Если изучается влияние фактора A на k уровнях и фактора B на r уровнях (двухфакторный дисперсионный анализ), то в эксперименте реализуются все возможные комбинации уровней факторов A и B (полный перебор), каждая из которых наблюдается n раз. Тогда результаты эксперимента представляются в виде таблицы из $N = k \cdot r \cdot n$ опытов.

С увеличением числа изучаемых факторов полный перебор всех вариантов (полный факторный эксперимент, обладающий рядом оптимальных свойств) приводит к большому числу опытов, выполнение которых может быть нереальным. Поэтому перед экспериментатором встает задача сокращения числа опытов при сохранении оптимальных свойств плана.

Ограниченный объем учебного пособия не позволяет рассмотреть все многообразие планов дисперсионного анализа. Поэтому в данной работе рассматриваются лишь некоторые многофакторные планы, построенные на основе комбинаторной конфигурации в виде латинских квадратов и прямоугольников Юдена. Эти планы позволяют равномерно сканировать многофакторное пространство не производя полного перебора вариантов и оценивать параметры линейных моделей, а в специальных случаях и нелинейных моделей.

Латинские квадраты. Основные понятия. Планы эксперимента

Латинским квадратом $n \times n$ называется квадратная таблица из n элементов (букв или чисел) такая, что каждый из них встречается только один раз в каждой строке и каждом столбце $/n/$. Из трех элементов образуется латинский квадрат 3×3

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array} \quad (3.1)$$

Из четырех элементов – латинский квадрат 4×4 и т.д. При решении практических задач размер латинских квадратов обычно не превышает 12×12 .

Латинский квадрат называется стандартным, если у него элементы первой строки и первого столбца построены в стандартном порядке (если буква, то в алфавитном порядке, если числа, то в порядке натурального ряда). Квадрат (3.1) является стандартным. Путем перестановок строк или столбцов стандартного квадрата можно получить ряд нестандартных. Так, всего существует два латинских квадрата 2×2 . Можно построить 12 различных 3×3 латинских квадратов.

Простейшим способом построения латинских квадратов является одношаговая циклическая перестановка букв, при которой первая буква исходной последовательности передвигается в конец и получается новая последовательность. С помощью такой перестановки построен квадрат (3.1). При последовательном планировании эксперимента используются упаковочные формы квадратов. Например, латинский квадрат 4×4 может быть представлен в виде упаковки четырех латинских квадратов 2×2 :

$$\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ \hline b & a & d & c \\ \hline c & d & a & b \\ \hline d & c & b & a \end{array} \quad (3.2)$$

Два $n \times n$ латинских квадрата взаимно ортогональны, если при наложении одного квадрата на другой каждый символ одного квадрата встретится один и только один раз с каждым символом другого квадрата. Если элементы одного квадрата обозначить латинскими буквами, а другого – греческими, то два взаимно ортогональных квадрата называют греко-латинским квадратом (латинским квадратом второго порядка).

Рассмотрим пример построения 3×3 греко-латинского квадрата. Для этого построим квадрат 3×3 из латинских букв с помощью одношаговой циклической перестановки букв слева направо, а квадрат 3×3 из греческих букв построим переставляя буквы наоборот справа налево. Эти два квадрата накладываем один на другой и получаем греко-латинский квадрат:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \text{I} & & & \text{II} & & & \text{Наложение I и II} & & & & & \\ A & B & C & \alpha & \beta & \gamma & A\alpha & B\beta & C\gamma & & & \\ \hline B & C & A & \gamma & \alpha & \beta & B\gamma & C\alpha & A\beta & & & \\ \hline C & A & B & \beta & \gamma & \alpha & C\beta & A\gamma & B\alpha & & & \\ \hline \end{array} \quad (3.3)$$

Три ортогональных квадрата, наложенные друг на друга, образуют гипер-греко-латинский квадрат (латинский квадрат третьего порядка).

Множество латинских квадратов называется сбалансированным, если в этом множестве каждый символ (элемент) в каждой возможной позиции появляется один и только один раз. Сбалансированное множество для квадрата размера $n \times n$ состоит из n таких квадратов, построенных с помощью циклической перестановки столбцов или строк. Например, для 3×3 квадрата после циклической перестановки столбцов получаем сбалансированное множество из трех квадратов:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & c & a & c & a & b \\ c & a & b & a & b & c & b & c & a \\ b & c & a & c & a & b & a & b & c \end{array} \quad (3.4)$$

Первоначально латинские квадраты получили широкое применение в сельскохозяйственных экспериментах с целью исключения влияния источников неоднородностей. Например, при использовании латинского квадрата каждая строка и столбец квадрата показывали положение участка земли на поле, в фруктовом саду, а элементы (символы) квадрата обозначали виды удобрений, растений, способы обработки, которые сравнивались по эффективности. При сравнении уровней основного фактора, соответствующих элементам квадрата, такой план эксперимента позволяет существенно снизить нежелательное влияние колебаний естественного плодородия при переходе от одного участка поля к другому. Затем планы такого рода нашли применение в других областях, в том числе и в промышленных исследованиях.

Латинские квадраты также могут быть использованы для получения дробной реплики от полного факторного эксперимента типа n^k . Если строки, столбцы и символы латинского квадрата употребить для обозначения уровней трех факторов, то каждая клетка (ячейка) квадрата будет показывать комбинацию уровней первого, второго и третьего факторов. Таким образом, получается n^2 различных комбинаций уровней факторов по сравнению с n^3 возможными комбинациями. Поэтому латинский квадрат $n \times n$ можно рассматривать как $1/n$ реплику от полного факторного эксперимента n^3 . Пример такого плана ($n = 3$) показан в табл. 3.1 в виде латинского квадрата и матрицы планирования.

Этот план содержит $N = 3^2 = 9$ различных опытов, что в три раза меньше по сравнению с полным факторным экспериментом $N = 3^3 = 27$,

представляющим собой три сбалансированных 3×3 латинских квадрата типа (3.4).

Таблица 3.1

План типа латинского квадрата 3×3 Матрица планирования

Фактор А	Фактор В			№ опыта	Факторы			Результат опыта y_u
	b_1	b_2	b_3		А	В	С	
a_1	c_1	c_2	c_3	1	a_1	b_1	c_1	y_1
a_2	c_3	c_1	c_2	2	a_1	b_2	c_2	y_2
a_3	c_2	c_3	c_1	3	a_1	b_3	c_3	y_3
				4	a_2	b_1	c_3	y_4
				5	a_2	b_2	c_1	y_5
				6	a_2	b_3	c_2	y_6
				7	a_3	b_1	c_2	y_7
				8	a_3	b_2	c_3	y_8
				9	a_3	b_3	c_1	y_9

При планировании эксперимента следует иметь в виду, что латинские квадраты как дробные реплики наиболее целесообразно использовать в тех случаях, когда имеются основания предполагать, что факторы не взаимодействуют друг с другом. Должное внимание придается случайному выбору квадрата из множества трансформаций. Обычно выбирается стандартный квадрат, а распределение уровней, соответствующих факторов по строкам, столбцам и буквам производится случайным образом.

Если в эксперименте исследуется действие четырех факторов А, В, С и D, каждый из которых варьируется на n уровнях, то в качестве плана эксперимента можно употребить латинский квадрат второго порядка (греко-латинский квадрат), получающийся после наложения друг на друга двух ортогональных латинских квадратов одинакового размера. В греко-латинском квадрате имеется n^2 различных комбинаций уровней факторов вместо n^4 таковых в полном факторном эксперименте. Поэтому греко-латинский квадрат позволяет уменьшить объем эксперимента в n^2 раз и его можно рассматривать как $1/n^2$ реплику от полного факторного эксперимента. Наиболее часто в экспериментальных исследованиях применяются греко-

латинские квадраты размера $n=3,4,5,7$. Ортогональной пары латинских квадратов размера $n=6$ не существует.

Латинский квадрат третьего порядка (гипер-греко-латинский квадрат) позволяет рассматривать пять факторов ($k=5$) и может использоваться как $1/n^3$ реплика от факторного эксперимента типа n^3 . При этом минимальный размер квадрата равен четырем ($n=4$). В общем случае в квадратах, для которых могут быть построены гиперквадраты, максимальное число рассматриваемых факторов равно $n-1$.

Планы эксперимента на основе латинских квадратов обладают рядом хороших статистических свойств: они симметричны, ортогональны и D-оптимальны. Эти планы могут оказаться очень полезными на первых этапах исследования при постановке задач отсеивающего эксперимента, позволяющего выделить перспективные или оптимальные комбинации уровней факторов и отсеять неприемлемые.

Наибольшим неудобством при применении латинских квадратов в реальном эксперименте можно считать то, что все факторы должны иметь одинаковое число уровней. Избежать этого ограничения позволяют специальные неполные латинские квадраты (латинские прямоугольники), предложенные Юденом и называемые квадратами Юдена. По существу это латинские квадраты, в которых отсутствует несколько строк (столбцов). Планы на основе латинских прямоугольников рассматриваются далее в разд. 3.5.

Математические модели и статистический анализ латинских квадратов

Латинские квадраты первого порядка пригодны для изучения влияния трех факторов А, В и С, если каждый из них варьируется на одинаковом числе уровней n и не взаимодействует друг с другом. В этом случае число различных опытов равно n^3 и результаты эксперимента представляются в виде линейной модели:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

где y_{ijk} – экспериментальный результат, полученный при i -ом уровне фактора А, j -ом уровне фактора В и k -ом уровне фактора С; μ – общее среднее значение; α_i – эффект i -того уровня фактора А; β_j – эффект j -того уровня фактора В; γ_k – эффект k -того уровня фактора С; ε_{ijk} – случайный

остаток, включающий ошибку единичного измерения и все эффекты не предусмотренные линейной моделью.

Для параметров модели (3.5) выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{k=1}^n \gamma_k = 0. \quad (3.6)$$

При полном переборе вариантов число опытов равно n^3 и можно построить следующую модель:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}, \quad (3.7)$$

где $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ и $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ – эффекты взаимодействия соответствующих уровней факторов.

Следовательно, ценой, которую мы должны платить за уменьшение объема эксперимента в n раз, является игнорирование взаимодействий. Однако следует иметь в виду, что для некоторых значений n можно найти латинский квадрат, допускающий введение в модель некоторых взаимодействий.

Рассмотрим вычислительную процедуру дисперсионного анализа для латинского квадрата $n \times n$. Эта процедура имеет некоторые особенности в зависимости от наличия (или отсутствия) повторных наблюдений.

В эксперименте с однократными наблюдениями, реализованными в случайном порядке, принята следующая вычислительная процедура.

1. Подсчитываются итоги по строкам A_i , столбцам B_j и латинским буквам C_k . Так, для плана, приведенного в табл.3.1, получим:

$$A_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad A_2 = y_4 + y_5 + y_6, \quad A_3 = y_7 + y_8 + y_9,$$

$$B_1 = y_1 + y_4 + y_7, \quad B_2 = y_2 + y_5 + y_8, \quad B_3 = y_3 + y_6 + y_9,$$

$$C_1 = y_1 + y_5 + y_9, \quad C_2 = y_2 + y_6 + y_7, \quad C_3 = y_3 + y_4 + y_8.$$

2. Общий итог

$$G = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^n B_j = \sum_{k=1}^n C_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ijk}.$$

3. Общая сумма квадратов

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ijk}^2 - G^2/n^2.$$

4. Сумма квадратов для строки (фактор А)

$$S_A = \sum_{i=1}^n A_i^2/n - G^2/n^2.$$

5. Сумма квадратов для столбца (фактор В)

$$S_B = \sum_{j=1}^n B_j^2 / n - G^2 / n^2.$$

6. Сумма квадратов для латинской буквы (фактор С)

$$S_C = \sum_{k=1}^n C_k^2 / n - G^2 / n^2.$$

7. Остаточная сумма квадратов

$$S_{\text{ост}} = S_0 - (S_A + S_B + S_C).$$

8. Результаты расчета вносятся в таблицу дисперсионного анализа (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Дисперсионный анализ $n \times n$ латинского квадрата с однократными наблюдениями

Источник изменчивости	Степень свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Расчетный F-критерий
Фактор А	$v_A = n - 1$	S_A	$s_A^2 = S_A / v_A$	$F_A = s_A^2 / s_{\text{ост}}^2$
В	$v_B = n - 1$	S_B	$s_B^2 = S_B / v_B$	$F_B = s_B^2 / s_{\text{ост}}^2$
С	$v_C = n - 1$	S_C	$s_C^2 = S_C / v_C$	$F_C = s_C^2 / s_{\text{ост}}^2$
Остаток	$v_{\text{ост}} = (n - 1)(n - 2)$	$S_{\text{ост}}$	$s_{\text{ост}}^2 = S_{\text{ост}} / v_{\text{ост}}$	
Итого	$n^2 - 1$	S_0		

9. Существенность влияния факторов проверяется с помощью критерия Фишера. Если вычисленное по результатам эксперимента дисперсионное отношение $F^{\text{расч}}$ превосходит табличное $F_{\alpha, v_1, v_2}^{\text{табл}}$, найденное по распределению Фишера для выбранного уровня значимости α , при степенях свободы $v_1 = (n - 1)$ и $v_2 = v_{\text{ост}} = (n - 1)(n - 2)$, то влияние соответствующего фактора признается существенным, и наоборот, если $F^{\text{расч}} \leq F_{\alpha, v_1, v_2}^{\text{табл}}$, то не существенным.

Однако верификация (лат. *verificatio* – доказательство, подтверждение) последнего утверждения не делается, так как возможно, что фактор значим, но его значимость не могла быть проверена из-за потери чувствительности, связанной с увеличением остатка при наличии взаимодействий. Вопрос о значимости фактора остается открытым и для его выяснения нужно провести дополнительную серию опытов. Для этого в том же плане поставить

повторные опыты, оценить ошибку эксперимента и, сопоставив ее с остатком, определить суммарный вклад взаимодействий. Можно пойти другим путем и композиционно достроить латинский квадрат до полного факторного эксперимента n^3 , пользуясь рядом сбалансированных латинских квадратов, и оценить эффекты взаимодействий в соответствии с моделью (3.7). Выбор пути определяется конкретной ситуацией, но последний путь безусловно дает больше информации.

10. И наконец, с помощью различных критериев выполняется проверка значимости различия средних значений по строкам A_i/n , столбцам B_j/n и латинским буквам C_k/n . Чаще всего используется t- критерий Стьюдента.

Если в каждой ячейке латинского квадрата производится одинаковое число повторных опытов p , то результаты эксперимента можно представить в виде следующей модели:

$$y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho + \epsilon_{ijkm}, \quad (3.8)$$

где m – номер повторного опыта ($m = 1, 2, \dots, p$); ρ – член, включающий все источники дисперсии (взаимодействия), которые не предсказаны линейной моделью; ϵ_{ijkm} – ошибка эксперимента; остальные обозначения те же, что и в модели (3.5).

Благодаря наличию повторных опытов случайный остаток линейной модели удается разложить на две составляющие ρ и ϵ_{ijkm} .

Вычислительная процедура начинается с подсчетов итогов по ячейкам T_{ij} , строкам A_i , столбцам B_j и латинским буквам C_k квадрата.

Затем рассчитываются суммы квадратов

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^p y_{ijkm}^2 - G^2 / n^2 p, \quad S_A = \sum_{i=1}^n A_i^2 / np - G^2 / n^2 p,$$

$$S_B = \sum_{j=1}^n B_j^2 / np - G^2 / n^2 p, \quad S_C = \sum_{k=1}^n C_k^2 / np - G^2 / n^2 p,$$

$$S_{\text{вз}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij}^2 / p - G^2 / n^2 p - (S_A + S_B + S_C), \quad (3.9)$$

$$S_{\text{ост}} = S_0 - (S_A + S_B + S_C), \quad S_{\text{ост}} = S_{\text{ост}} - S_{\text{вз}}.$$

Сумму $S_{\text{ост}}$ можно определить независимо и проверить правильность вычислений. Результаты дисперсионного анализа представляются в виде табл. 3.3.

Таблица 3.3

Дисперсионный анализ $n \times n$ латинского квадрата с повторными равночисленными наблюдениями

Источник изменчивости	Степень свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Расчетный F-критерий
Фактор А	$v_A = n - 1$	S_A	$s_A^2 = S_A / v_A$	$F_A = s_A^2 / s_{\text{ош}}^2$
В	$v_B = n - 1$	S_B	$s_B^2 = S_B / v_B$	$F_B = s_B^2 / s_{\text{ош}}^2$
С	$v_C = n - 1$	S_C	$s_C^2 = S_C / v_C$	$F_C = s_C^2 / s_{\text{ош}}^2$
Взаимодействия	$v_{\text{вз}} = (n-1)(n-2)$	$S_{\text{вз}}$	$s_{\text{вз}}^2 = S_{\text{вз}} / v_{\text{вз}}$	$F_{\text{вз}} = s_{\text{вз}}^2 / s_{\text{ош}}^2$
Ошибка	$v_{\text{ош}} = n^2(p-1)$	$S_{\text{ош}}$	$s_{\text{ош}}^2 = S_{\text{ош}} / v_{\text{ош}}$	
Итого	$n^2p - 1$	S_0		

Значимость влияния факторов устанавливается как и ранее с помощью F-критерия. В данном случае удается проверить адекватность описания опытных данных линейной моделью. Если дисперсионное отношение $F_{\text{вз}}^{\text{расч}} = s_{\text{вз}}^2 / s_{\text{ош}}^2 \leq F_{\alpha, v_{\text{вз}}, v_{\text{ош}}}^{\text{табл}}$, то гипотеза об адекватности линейной модели принимается, в противном случае ($F_{\text{вз}}^{\text{расч}} > F_{\alpha, v_{\text{вз}}, v_{\text{ош}}}^{\text{табл}}$) – отвергается. Верификацию гипотезы о незначимости влияния фактора мы не можем делать, так как его, например, положительный эффект может быть смешан с отрицательным эффектом взаимодействия. Тогда фактически значимый эффект фактора по расчету окажется незначимым.

Оценки параметров модели (3.8) находятся методом наименьших квадратов:

$$\mu = G / n^2p = \bar{G}, \quad \alpha_i = A_i / np - \bar{G}, \quad \beta_j = B_j / np - \bar{G},$$

$$\gamma_k = C_k / np - \bar{G}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

Эти оценки позволяют просчитать значения отклика в интересующих нас комбинациях уровней факторов и потом найти оптимальные комбинации при условии адекватности модели.

Дисперсионный анализ при изучении влияния четырех факторов с использованием плана типа греко-латинского квадрата аналогичен дисперсионному анализу для латинского квадрата и фактически отличается от него добавлением суммы квадратов для четвертого фактора и тем, что число степеней свободы остаточной суммы квадратов уменьшается на $(n-1)$.

Математическая модель является обобщением модели для плана типа латинского квадрата. Так, при однократных наблюдениях она имеет вид:

$$y_{ijk1} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_1 + \varepsilon_{ijk1}, \quad i, j, k, 1 = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

где δ_1 – эффект 1-го уровня фактора D (четвертого фактора), а прочие обозначения те же, что и модели (3.5).

При повторных опытах выделяется эффект взаимодействий ρ :

$$y_{ijk1m} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_1 + \rho + \varepsilon_{ijk1m}, \quad m = 1, \dots, p. \quad (3.12)$$

Такое обобщение можно продолжить на пять и более факторов, используя планы типа гиперквадратов.

Пример построения параметрической модели с использованием плана типа латинского квадрата второго порядка

При восполнении утрат каменных стеновых конструкций памятников архитектуры часто используются отделочные растворы на основе цемента, имитирующие реставрируемый материал. Долговечность сцепления этих материалов зависит от большого числа факторов, среди которых было выделено четыре фактора, рассматриваемых на трех уровнях, выбранных на основании анализа априорных данных.

Фактор А – толщина отделочного слоя на уровне $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ и $a_3 = 7$ см.

Фактор В – засоленность камня на уровне $b_1 = 0$, $b_2 = 2,5$ и $b_3 = 5\%$.

Фактор С – тип добавки вводимой в растворную смесь, используемую для нанесения отделочного слоя, на уровне c_1 – без добавки; c_2 – добавка С-3 в количестве 0,4% от массы цемента; c_3 – добавка ЦСПК в количестве 0,3%.

Фактор D – способ подготовки поверхности камня перед нанесением отделочного слоя на уровне d_1 – без подготовки, d_2 – очистка щеткой и d_3 – очистка щеткой с выравниванием.

Факторы А и В являются количественными, а факторы С и D – качественными.

В качестве показателя долговечности сцепления камня с отделочным слоем принята величина силы отрыва отделочного слоя от поверхности каменного образца после 35 циклов одностороннего замораживания и оттаивания в климатической камере (остаточная прочность) y , Па $\cdot 10^5$.

На основании анализа априорных данных и профессионально-логических соображений было выдвинуто предположение о статистической незначимости взаимодействий рассматриваемых факторов и выбран план эксперимента типа греко-латинского квадрата 3×3 ($n=3$) с двумя повторными опытами ($p=2$) для оценки ошибки эксперимента. Тогда результаты эксперимента описываются моделью:

$$y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijklm} \quad (3.13)$$

В этой модели в отличие от модели (3.12) отсутствует слагаемое ρ , учитывающее суммарный эффект взаимодействий, так как для греко-латинского квадрата размера $n=3$ число степеней свободы суммы квадратов взаимодействий (S_{B3}) равно $(n-1)(n-3)=0$. В дальнейшем будет показано, что при $n=3$ и $S_{B3}=0$. Поэтому проверить адекватность описания опытных данных, выбранного плана, моделью (3.13) нельзя.

План эксперимента и результаты испытаний образцов на отрыв отделочного слоя приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

План эксперимента и результаты измерений остаточной прочности сцепления материалов у, Па·10⁵

Фактор А	Фактор В		
	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0,08 c ₁ d ₁	4,25 c ₂ d ₂	3,8 c ₃ d ₃
a ₂	0,40 c ₂ d ₃	3,90 c ₃ d ₁	3,7 c ₁ d ₂
a ₃	5,0 c ₃ d ₂	3,65 c ₁ d ₃	1,75 c ₂ d ₁
	5,5 6,75 6,30	4,20 2,3 2,6	2,00 2,48 3,60

В табл. 3.4 латинские буквы греко-латинского квадрата употреблены для обозначения уровней фактора С, а греческие буквы – для уровней фактора D. Все 18 испытаний проводились в случайном порядке. Для упрощения вычислений из каждого измеренного значения y вычли 3. Величина сумм квадратов и результаты анализа от этого не меняются. Полученные нормированные данные, а также некоторые предварительные результаты их обработки приведены в

табл.3.5. В ней показаны итоги по ячейкам T_{ij} , по строкам A_i , по столбцам B_j , их квадраты и общий итог $G = 8,36$.

Таблица 3.5

Предварительные расчеты по нормированным данным (y-3)

Фактор А	Фактор В			A _i	A _i ²
	b ₁	b ₂	b ₃		
a ₁	-2,92 -2,6 -5,52	1,25 0,9 2,15	0,8 0,7 1,5	-1,87	3,4969
a ₂	2,0 2,6 4,6	0,65 1,20 1,85	-1,25 -1,0 -2,25	4,2	17,64
a ₃	3,75 3,3 7,05	-0,7 -0,4 -1,1	-0,52 0,6 0,08	6,03	36,4978
B _j	6,13	2,9	-0,67	8,36	
B _j ²	37,5769	8,41	0,4489		

Итоги по уровням фактора С определяются как суммы итогов трех ячеек квадрата, в которых этот фактор имеет соответствующий уровень:

$$C_1 = T_{11} + T_{23} + T_{32} = -5,52 - 2,25 - 1,1 = -8,87;$$

$$C_2 = T_{12} + T_{21} + T_{33} = 2,15 + 4,6 + 0,008 = 6,83;-$$

$$C_3 = T_{13} + T_{22} + T_{31} = 1,5 + 1,85 + 7,05 = 10,4$$

По аналогии находим итоги по уровням фактора D:

$$D_1 = -3,59; D_2 = 6,95; D_3 = 5,0.$$

Далее по (3.9) рассчитывается общая сумма квадратов S_o , суммы квадратов для факторов S_A , S_B , S_C , S_D , остатка $S_{ост}$ и ошибки $S_{ош}$:

$$S_o = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^2 y_{ijkim}^2 \right) - (G^2 / n^2 p) = 60,2068 - 3,8828 = 56,3240;$$

$$S_A = \left(\sum_{i=1}^3 A_i^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 9,5830 - 3,8828 = 5,7002;$$

$$S_B = \left(\sum_{j=1}^3 B_j^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 7,7393 - 3,8828 = 3,8565;$$

$$S_C = \left(\sum_{k=1}^3 C_k^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 38,9143 - 3,8828 = 35,0315;$$

$$S_D = \left(\sum_{i=1}^3 D_i^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 14,3651 - 3,8828 = 10,4823;$$

$$S_{\text{ост}} = S_0 - (S_A + S_B + S_C + S_D) = 56,3240 - (5,7002 + 3,8565 + 35,0315 + 10,4823) = 56,3240 - 55,0706 = 1,2534 = S_{\text{ом}}.$$

В данном случае $S_{\text{ост}} = S_{\text{ом}}$, так как сумма квадратов для взаимодействий

$$S_{\text{вз}} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2 / p \right) - (G^2 / n^2 p) - (S_A + S_B + S_C + S_D) = 58,9534 - 3,8828 - 55,0706 = 0.$$

Для проверки правильности вычислений и допущения дисперсионного анализа об воспроизводимости опытов с равной точностью (однородность дисперсий опытов) были определены суммы квадратов отклонений внутри каждой ячейки (опыта) плана

$$S_{ij} = \sum_{m=1}^{p-1} (y_{ijkm} - T_{ij} / p)^2, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Эти суммы имеют одну степень свободы $\nu = p - 1 = 1$, поэтому дисперсия опыта $s_{ij}^2 = S_{ij} / \nu = S_{ij}$. Затем независимо от остальных сумм квадратов была найдена сумма квадратов для ошибки

$$S_{\text{ом}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} = 1,2534,$$

которая совпала с ранее вычисленной.

Однородность дисперсий опытов s_{ij}^2 проверялась с помощью G-критерия Кохрена. Оказалось, что экспериментальный G-критерий, найденный как отношение максимальной дисперсии отдельного опыта к сумме дисперсий всех девяти опытов, не превышает табличный, взятый из приложения 1 при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$, числе степеней свободы числителя $\nu_1 = 1$ (число степеней свободы отдельного опыта), числе сравниваемых дисперсий $N = 9$.

$$G^{\text{расч}} = 0,6272 / 1,2534 = 0,500 < G_{0,05;1,9}^{\text{табл}} = 0,640.$$

Следовательно, дисперсии во всех опытах с доверительной вероятностью 95% можно считать однородными.

Результаты дисперсионного анализа опытных данных сведены в табл.3.6.

Из табл.3.6 видно, что во всех случаях экспериментальный критерий Фишера значительно превышает критический, взятый при 5%-ном уровне

значимости и степенях свободы числителя $\nu_1 = 2$ и знаменателя $\nu_2 = 9$ (см. приложение 2). Таким образом, оказалось, что на прочность сцепления у существенно влияют все четыре варьируемые фактора. В рассмотренном факторном пространстве наиболее сильное влияние на показатель у оказывает фактор С – тип добавки вводимой в растворную смесь.

Таблица 3.6

Дисперсионный анализ результатов эксперимента при изучении остаточной прочности сцепления материалов

Источник дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Критерий Фишера	
				$F^{\text{расч}}$	$F_{\alpha=0,05}^{\text{табл}}$
Фактор А	2	5,7002	2,850	20,46	4,26
В	2	3,8565	1,928	13,85	4,26
С	2	35,0315	17,516	125,77	4,26
Д	2	10,4823	5,241	37,63	4,26
Взаимодействия	0	0	0		
Ошибка	9	1,2534	0,139		
Итого	17	56,3240			

Проверка различия любых двух средних итогов для уровней каждого фактора производилась с помощью доверительного интервала для разности средних. Для этого определяем нормированную ошибку среднего $s_{\bar{y}} = \sqrt{s_{\text{ом}}^2 / np} = \sqrt{0,139 / 6} = 0,152$ и двусторонний t-критерий Стьюдента $t_{\alpha, n^2(p-1)}$, который находится при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и степени свободы для ошибки $n^2(p-1) = 9$ ($t_{0,05;9} = 2,26$) (см. приложение 3). Произведение этих двух величин дает половину ширины доверительного интервала для средних значений при доверительной вероятности 0,95 $L/2 = s_{\bar{y}} \cdot t_{0,05;9} = 0,152 \cdot 2,26 = 0,344$. Половина ширины доверительного интервала для разности средних увеличивается в $\sqrt{2}$ раз и равняется $L'/2 = \sqrt{2} \cdot L/2 = \sqrt{2} \cdot 0,344 = 0,486$.

Для уровней фактора А, показанных в скобках, имеем следующие средние итоги $\bar{A}_i = A_i / np$: $-0,312(a_1)$; $0,700(a_2)$; $1,005(a_3)$. Видим, что величина разности между средними итогами уровней a_2 и a_1 , a_3 и a_1 превышает величину половины ширины доверительного интервала (0,486), а

для уровней a_3 и a_2 нет. Следовательно, увеличение толщины отделочного слоя с 3 см до 5 или 7 см приводит к статистически заметному росту прочности сцепления. Однако увеличивать толщину отделочного слоя выше 5 см вряд ли целесообразно.

Средние значения итогов $\bar{B}_j = V_j / np$ для уровней фактора В дают такой ряд: 1,021 (b_1); 0,483 (b_2); -0,112 (b_3). В этом ряде любая разность двух средних итогов превышает величину половины ширины доверительного интервала. Поэтому имеются основания предполагать, что в рассмотренном диапазоне варьирования увеличение засоленности камня на 2–2,5% приводит к заметному уменьшению прочности сцепления.

Уровням фактора С соответствует следующий возрастающий ряд средних итогов $\bar{C}_k = C_k / np$: -1,479 (c_1); 1,138 (c_2); 1,733 (c_3). Здесь видно, что каждая добавка (уровни c_2 и c_3) при введении ее в растворную смесь дает существенный прирост величины прочности сцепления. Положительный эффект введения добавки ЩСПК в растворную смесь в количестве 0,3% (уровень c_3) заметно превышает положительный эффект добавки С-3 в количестве 0,4% (уровень c_2), так как $\bar{C}_3 - \bar{C}_2 = 1,733 - 1,138 = 0,595 > 0,486$.

Для уровней фактора D средние значения итогов $\bar{D}_i = D_i / np$ равны: -0,599 (d_1); 1,158 (d_2); 0,833 (d_3). Эти средние значения говорят о том, что рассмотренные способы подготовки поверхности камня перед нанесением отделочного слоя (уровни d_2 и d_3) дают существенный положительный эффект. Между уровнями d_2 и d_3 нет статистически заметной разницы ($\bar{D}_2 - \bar{D}_3 = 1,158 - 0,833 = 0,325 < 0,486$). Однако из экономических соображений предпочтительнее уровень d_2 – обработка поверхности камня щеткой без выравнивания.

При сравнении нескольких средних k ($k > 2$) можно использовать множественный ранговый критерий Дункана [3]. Для этого из приложения 4 нужно выписать ($k-1$) значений рангов r с выбранным уровнем значимости ($\alpha = 0,05$), с числом степеней свободы $v_{\text{ом}}$ и $p=2,3,\dots,k$. Умножить эти значения рангов на нормированную ошибку среднего $s_{\bar{y}}$ и определить ($k-1$) наименьших значимых рангов (НЗР), используемых для проверки значимости различия между средними.

В нашем случае $k=3$; $\alpha = 0,05$; $s_{\bar{y}} = 0,152$; $v_{\text{ом}} = 9$. Тогда из приложения 4 получим:

p	2	3
Ранги, r	3,20	3,34
НЗР, r · s _y	0,486	0,508

Средние итоги для уровней факторов выстраивались в ранжировочный ряд. Разность между крайними значениями этого ряда сравнивалась с НЗР = 0,508, а разность между соседними значениями сравнивалась с НЗР = 0,486 и затем принималась или отвергалась гипотеза о значимости различия средних. При этом выводы, сделанные с помощью критерия Дункана, подтвердили прежние, так как значения НЗР практически совпали со значением половины ширины доверительного интервала $L'/2 = 0,486$.

Чтобы предсказывать значения остаточной прочности сцепления любых комбинаций рассмотренных уровней варьируемых факторов, не вошедших в план эксперимента по формулам (3.10), были определены оценки параметров модели (3.13), которые приведены в табл. 3.7.

Оценка общего среднего по нормированным данным табл. 3.5 равна $\mu' = G/n^2p = 8,36/18 = 0,464$, а по измеренным данным табл. 3.4 $\mu = \mu' + 3 = 3,464$.

Таблица 3.7

Номер уровня фактора	Оценки эффектов уровней факторов, Па·10 ⁵			
	$\alpha_i(a_i)$	$\beta_j(b_j)$	$\gamma_k(c_k)$	$\delta_l(d_l)$
1	-0,776	0,557	-1,943	-1,063
2	0,236	0,019	0,674	0,694
3	0,541	-0,576	1,269	0,369

Сейчас у нас появилась возможность по модели (3.13) предсказывать величину остаточной прочности сцепления \hat{y} для любых комбинаций фиксированных уровней факторов и получить информацию для принятия инженерных решений. Например, для условий первого опыта (a, b, c, d_1) имеем $\hat{y} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 3,464 - 0,776 + 0,557 - 1,943 - 1,063 = 0,239$ Па·10⁵. Среднее значение измеренной прочности сцепления в первом опыте равно $\bar{y} = (0,08 + 0,40)/2 = 0,24$ Па·10⁵. Разница $\bar{y} - \hat{y} = 0,24 - 0,239 = 0,001$ объясняет-

ся погрешностью округления эффектов уровней факторов. Заметим, что средние значения прочности для других условий опытов плана тоже будут предсказываться точно (только для 3×3 греко-латинского квадрата). Однако это не дает права утверждать, что модель будет достаточно точно предсказывать прочность сцепления для любых комбинаций уровней факторов, так как без дополнительных опытов, выполненных вне плана эксперимента, нельзя оценить адекватность модели.

Для облегчения интерполяционных расчётов значения эффектов уровней количественных факторов были аппроксимированы линейным приближением и получена модель

$$\hat{y} = 2,383 + 0,33x_1 - 0,227x_2 + \gamma_k + \delta_1, \quad (3.14)$$

где x_1 и x_2 – натуральные значения уровней факторов А и В, а эффекты γ_k и δ_1 берутся из табл. 3.7.

Эта модель достаточно точно описывает опытные данные \bar{y} , которые использованы при её построении, так как максимальная разница между \bar{y} и \hat{y} (равная 0,254) даже не превышает стандартного отклонения $s_{\bar{y}} = \sqrt{s_{\text{ом}}^2 / p} = \sqrt{0,139/2} = 0,264$. Как уже отмечалось, адекватное описание опытных данных, есть необходимое, но не достаточное условие адекватности модели. Поэтому в качестве дополнительной оценки адекватности модели (3.14) использовался метод контрольных точек, при котором результаты опытов, выполненных вне плана эксперимента, сравнивались с результатами расчётов по модели. Для этого было выполнено два опыта, каждый из которых повторялся дважды ($p = 2$).

В первом опыте имели следующие уровни варьируемых факторов А, В, С и D: $x_1 = 5$ см; $x_2 = 4,1\%$; c_1 и d_2 . Усреднённое по двум повторным опытам значение остаточной прочности составляло

$$\bar{y} = (2,36 + 1,81)/2 = 2,085 \text{ Па} \cdot 10^5,$$

а предсказанное по модели (3.14)

$$\hat{y} = 2,383 + 0,33 \cdot 5 - 0,227 \cdot 4,1 - 1,943 + 0,694 = 1,853 \text{ Па} \cdot 10^5.$$

Оценка дисперсии этого опыта $s^2 = 0,1512$. Условия второго опыта отличались от условий первого только тем, что фактор С находился на уровне c_2 . Во втором опыте получили: $\bar{y} = (4,10 + 4,31)/2 = 4,205 \text{ Па} \cdot 10^5$; $\hat{y} = 4,470 \text{ Па} \cdot 10^5$ и $s^2 = 0,022$.

Дополнительные опыты позволяют уточнить оценку дисперсии воспроизводимости $s_{\text{ом}}^2$. Прежде всего по G-критерию проверяем однородность дисперсий 11 опытов (9 по плану и 2 вне плана эксперимента).

$$G^{\text{расч}} = 0,6272/1,4273 = 0,439 < G_{0,05;11}^{\text{табл}} = 0,571.$$

Дисперсии опытов однородны и тогда $s_{\text{ом}}^2 = 1,4273/11 = 0,1298$. Эта дисперсия основана на 11 степенях свободы.

Если модель (3.14) адекватно предсказывает результаты измерений в дополнительных опытах, то разность $|\bar{y} - \hat{y}|$ не должна (по t-критерию) значительно отличаться от нуля. Для проверки этой гипотезы задаются уровнем значимости α и вычисляют экспериментальный t-критерий

$$t^{\text{расч}} = \frac{|\bar{y} - \hat{y}| \sqrt{p}}{\sqrt{s_{\text{ом}}^2}}. \quad (3.15)$$

При $t^{\text{расч}} < t_{\alpha, \nu}^{\text{табл}}$ гипотеза об адекватности принимается (здесь ν – число степеней свободы для $s_{\text{ом}}^2$).

Задаёмся $\alpha = 0,05$. Тогда из приложения 3 находим $t_{0,05;11}^{\text{табл}} = 2,20$. По формуле (3.15) экспериментальный t-критерий для первого дополнительного опыта составил 0,910, а для второго – 1,04. Эти значения не превышают табличного. Следовательно, опытные данные, которые не были использованы при построении модели (3.14), адекватно предсказываются этой моделью, а сама модель может оказаться полезной при решении инженерных задач.

Если аппроксимировать значения эффектов уровней фактора А параболой, то получим более сложную модель, которая почти без ошибок предсказывает усреднённые значения результатов опытов \bar{y} по плану эксперимента,

$$\hat{y} = 0,411 + 1,213x_1 - 0,088x_1^2 - 0,227x_2 + \gamma_k + \delta_1. \quad (3.16)$$

Эта модель в первом дополнительном опыте предсказывает прочность сцепления $\hat{y} = 2,096 \text{ Па} \cdot 10^5$ (сравните с опытной $\bar{y} = 2,085 \text{ Па} \cdot 10^5$), а во втором опыте $\hat{y} = 4,713 \text{ Па} \cdot 10^5$ ($\bar{y} = 4,205 \text{ Па} \cdot 10^5$). Видим, что в первой дополнительной точке модель (3.16) предсказывает прочность сцепления точнее, чем модель (3.14), а во второй точке – наоборот. Причем во втором опыте модель (3.16) дает экспериментальный t-критерий $t = 4,205 - 4,713 \sqrt{2} / \sqrt{0,1298} = 1,995$ близкий критическому $t_{0,05;11}^{\text{табл}} = 2,20$.